

المخروطيات

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

1

نعتبر (\mathcal{C}) مجموعة النقط $M(x, y)$ من \mathcal{P} التي تحقق :

$$\frac{y^4}{26} = x^4 - 2x^2 + 1$$

(1) بين أن (\mathcal{C}) هو اتحاد مخروطيين (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2) .

(2) حدد العناصر المميزة للمخروطيين (\mathcal{C}_1) و (\mathcal{C}_2) .

(3) أنشئ (\mathcal{C}) .

الجواب : (1) لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P} لدينا :

$$M(x, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)(x^2 - \frac{y^2}{4} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \text{ أو } x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) \in (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$$

www.learnit.org

بيئت : $(\mathcal{C}_1) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ هذلول.

• $(\mathcal{C}_2) : x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$: هليج

وبالتالي : $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$

(2) العناصر المميزة لإهليج (\mathcal{C}_2) :

لدينا : $(\mathcal{C}_2) : \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ حيث : $a=1$ و $b=2$ و $b > a$

لدينا : $c^2 = b^2 - a^2 = 3$ إذن : $c = \sqrt{3}$

ومنه : التباعد المركز بي - (\mathcal{C}_2) هو : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* البؤرتان لـ (\mathcal{C}_2) هما : $F_1(0, -c)$ و $F_2(0, c)$

أي : $F_1(0, -\sqrt{3})$ و $F_2(0, \sqrt{3})$

* الدليلان لـ (\mathcal{C}_2) هما : $(\mathcal{D}_1) : x = \frac{b^2}{c}$ و $(\mathcal{D}_2) : x = -\frac{b^2}{c}$

أي : $(\mathcal{D}_1) : x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ و $(\mathcal{D}_2) : x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

* الرؤوس لـ (\mathcal{C}_2) هي : $A(-1, 0)$ و $A'(1, 0)$ و $B(0, -2)$ و $B'(0, 2)$

العناصر المبينة للمذلول (F2):

لدينا: $(F2): \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{20} = 1$ حيث: $a=1$ و $b=2$

لدينا: $c^2 = a^2 + b^2 = 5$ إذن: $c = \sqrt{5}$

ومنه: * التباعد المركزي لـ (F2) هو: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

* البؤرتان لـ (F2) هما: $F_2(c, 0)$ و $F_2(-c, 0)$

أي: $F_2(\sqrt{5}, 0)$ و $F_2(-\sqrt{5}, 0)$

* الدليلان لـ (F2) هما: $(D2): x = \frac{a^2}{c}$ و $(D2'): x = -\frac{a^2}{c}$

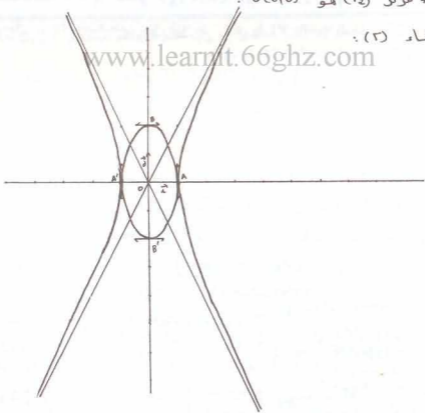
أي: $(D2): x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $(D2'): x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

* المقاربات لـ (F2) هما: $(A2): y = \frac{b}{a}x$ و $(A2'): y = -\frac{b}{a}x$

أي: $(A2): y = 2x$ و $(A2'): y = -2x$

* مركز (F2) هو $O(0,0)$.

(3) إنشاء (F2):



2

- المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعاقد منظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$
- لكن (\mathcal{C}) مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقق : $y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$
- (1) حدد طبيعة والعناصر ل (\mathcal{C}) .
- (2) اعط معادلة المماس (\mathcal{D}) عند النقطة $A(2, 3)$
- (3) بين أن المستقيم (\mathcal{D}) الذي معادلته : $x + 2y + 1 = 0$ مماس ل (\mathcal{C})
- (4) أُنشئ (\mathcal{C}) .

الجواب = (1) لكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P}

لدينا : $M(x, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = 2(x+1)$$

نفج : $\begin{cases} x = x+1 \\ y = y-1 \end{cases} \quad \text{ن}(-1, 1)$

معادلة (\mathcal{C}) في المعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي : $y^2 = 2x$ ($p=1$)

ومنه : (\mathcal{C}) مثلج بؤرتة : $F(\frac{1}{2}, 0)$ بالنسبة للمعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

و دليله : $F(-\frac{1}{2}, 0)$ بالنسبة للمعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(D) : $x = -\frac{1}{2}$ بالنسبة للمعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(D) : $x = -\frac{3}{2}$ بالنسبة للمعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

ورأسه $\text{ن}(-1, 1)$.

(2) ليكن (\mathcal{D}) المماس ل (\mathcal{C}) عند النقطة $A(2, 3)$.

لدينا : $A \in (\mathcal{C})$ إذن معادلة (\mathcal{D}) في المعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

هي : $\gamma \gamma_0 = p(x + x_0)$ أي : $2(y-1) = (x+1) + 2$

ومنه : $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

(3) لنبين أن $(\mathcal{D}) : x + 2y + 1 = 0$ مماس ل (\mathcal{C})

لتكن : $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P}

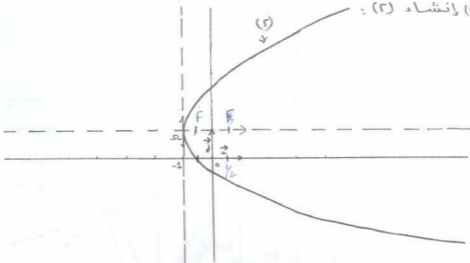
لدينا : $M(x, y) \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y^2 - 2y - 2x - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

ومنه : $(\Gamma) \cap (\Delta) = \{B(2, -1)\}$

وبالتالي : (Δ) مماس لـ (Γ) .

4) لإفتضاء (Γ) :



المستوى (3) منسوب إلى المعلم متعامد معنظم $(0, 2, \vec{j})$

تكون (Γ) مجموعة التقاطع من المستوى (3) بحيث :

$$y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$

4) بين أن (Γ) هو اتحاد جزئيين من شلحين .
عاشرة (Γ) .

الجواب : 1) لتكن نقطة حد المستوى (3)

لدينا : $M(x, y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (y-1)^2 = 2(x+2) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x \leq 0 \\ (y-1)^2 = -2(x-2) \end{cases}$$

نعتبر الشلحين (P_1) و (P_2) بحيث :

$$(P_1) : (y-1)^2 = -2(x-2)$$

$$(P_2) : (y-1)^2 = 2(x+2)$$

$$\Omega_1(2, 1) \cap \begin{cases} x = x-2 \\ y = y-1 \end{cases}$$

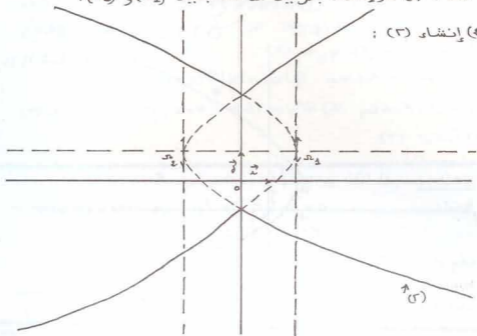
$$\Omega_2(-2, 1) \cap \begin{cases} x = x+2 \\ y = y-1 \end{cases}$$

معادلة (P_1) في المعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي : $y^2 = -2x$

معادلة الشلح (P_2) في المعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي : $y^2 = 2x$

منه : (3) هو اتحاد جزئيين من التلجمين (E_1) و (E_2) .

(4) إنشاء (3) :



المستوى (3) المرسوم، (4) فاعلم بتعدادهم $(0, 2, 1, 1)$

4

لكن مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى (3) بحيث :

$$4mx^2 + y^2 - 8x = 0 \quad \text{حيث : } m \in \mathbb{R}$$

(1) حدد تبعاً لقيم m طبيعة (E_m) .

(2) أنشئ المنحنيين : (E_1) ، (E_2)

الجواب = (1) لكن نقطة من المستوى (3).

$$M(x, y) \in (E_m) \Leftrightarrow 4mx^2 + y^2 - 8x = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$y^2 = 8x \quad \text{* إذا كان : } m = 0 \quad \text{فإن :}$$

ومنه : (E_0) تلجم.

$$M(x, y) \in (E_m) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{y^2}{4m} = 0 \quad \text{* إذا كان : } m \neq 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{4m} = \frac{1}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{\frac{y^2}{4m}}{\frac{1}{m}} = 1$$

* إذا كان: $m > 0$ فإن: (E_m) إهليج أو دائرة .

* إذا كان: $m < 0$ فإن: (E_m) هذلول .

(E) وإنشاء المنحنيين : (E_2) : (E_3)

لدينا :

(E_1) : إهليج مركزه $(0,0)$ ورؤوسه .

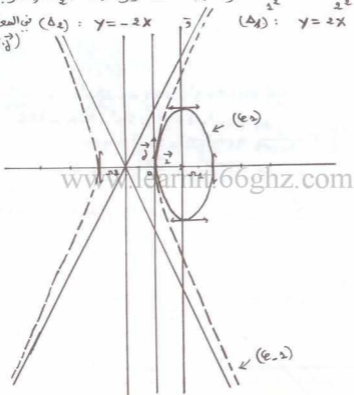
$$\frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ و $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$ و (\vec{e}_1, \vec{e}_2) العلم

لدينا : (E_2) : هذلول مركزه $(-4,0)$ ومقارباته :

$$\frac{(x+1)^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

(Δ_1) : $y = 2x$ و (Δ_2) : $y = -2x$ هي المعلم



5 المستوى (3) منسوب إلى معلم متعامد منحنيهم $(0,2, \vec{e}_1)$

نعتبر المستقيم (3) الذي معادلته : $x = \frac{16}{3}$

(1) إعط معادلة ديكارتية للإهليج (2) الذي دليله (3) وبؤرتيه النقطة O

وتباعده المركزي $e = \frac{3}{5}$

(2) أنشئه (3)

3) لتكن M نقطة من (Γ) : نضع : $\theta \equiv (\vec{x}; \overrightarrow{OM})$ $[\in]\pi$

أ- بين أن : $OM = \frac{16}{3+3\cos\theta}$

ب- نفرض أن : $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. المستقيم (OM) يقطع (\mathcal{D}) في I و (Γ) في M'

أحسب : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$ وبين أن :

الجواب : 4) لدينا الإهليج : $(\Gamma) = \Gamma(0; 0; c)$

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى (\mathcal{D}) لدينا :

$$M(x, y) \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M, (\mathcal{D}))} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{5} \times \frac{|x - \frac{16}{3}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$\Leftrightarrow 25(x^2 + y^2) = 9(x - \frac{16}{3})^2$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 = 9x^2 - 96x + 256$$

$$\Leftrightarrow 16(x+3)^2 + 25y^2 = 400$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

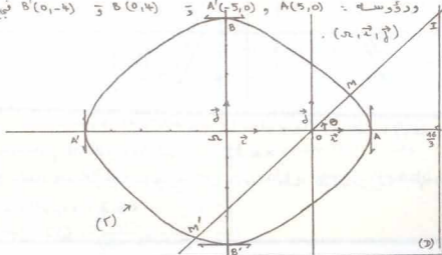
www.learnti.66gtz.com

ومنه معادلة الإهليج (Γ) هي : $\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

5) إنشاء الإهليج (Γ)

لدينا : $(\Gamma) : \frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ مركزه $\gamma(-3, 0)$

وردوسه : $A(5, 0)$ و $A'(-5, 0)$ و $B(0, 4)$ و $B'(0, -4)$ في المعلم



(3) لدينا : $(\vec{i}, \vec{OM}) \equiv \theta \quad [2\pi]$ إذن : $\begin{cases} x = OM \cos \theta \\ y = OM \sin \theta \end{cases}$

ولدينا : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} d(M, D)$

(3) : $x = \frac{16}{3} \cdot \cos \theta$

$\Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} |OM \cos \theta - \frac{16}{3}|$

$\Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} OM \cos \theta - \frac{16}{3}$ أو $OM = -\frac{2}{5} OM \cos \theta + \frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow OM = \frac{-16}{5-3 \cos \theta}$ أو $OM = \frac{16}{5+3 \cos \theta}$
غير ممكن

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM = \frac{16}{5+3 \cos \theta}$

(ب - لدينا : $(\vec{i}, \vec{OM}') \equiv \theta + \pi \quad [2\pi]$

بمأت : $M' \in (\Gamma)$ فإن : $OM' = \frac{16}{5+3 \cos(\pi+\theta)} = \frac{16}{5-3 \cos \theta}$

ومنه : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16} (5+3 \cos \theta) + \frac{1}{16} (5-3 \cos \theta)$

إذن : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{5}{8}$

ولدينا : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16} (5+3 \cos \theta) - \frac{1}{16} (5-3 \cos \theta)$

إذن : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \cos \theta$

ولدينا : $\cos \theta = \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$ أي : $\cos \theta = \frac{\frac{16}{3}}{OI}$

ومنه : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI}$

وبالتالي : $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$

المستوى (3) منسوب إلى المعلم متعاود متعاود عمقهم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

6

تعتبر (2) مجموعة التفرغ $M(x, y)$ من (3) بحيث :

$$xy - x - y = 0$$

تعتبر النقطة $\pi(1, 1)$ والمتجهين : $\vec{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ و $\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$

(1) حدد معادلة ديكارتيّة المنحنى (2) في المعلم $(\pi; \vec{i}; \vec{j})$

(2) حدد طبيعّة والعناصر المميزة للمنحنى (2) في المعلم $(\pi; \vec{i}; \vec{j})$